Đáp án Đề 7 – Thi cuối kỳ I Đại Số K60

Câu 1:

$A \to (B \to C) \leftrightarrow \bar{A} \vee (\mathrm{B} \to \mathrm{C})$

$\leftrightarrow \bar{A} \vee (\bar{B} \vee C)$

$\leftrightarrow (\bar{A} \vee \bar{B}) \cup C$

$\leftrightarrow \overline{A \wedge B} \vee C$

$\leftrightarrow (A \wedge B) \to C$ (dpcm)

Câu 2:

$$z_{k+1} = \sqrt[2015]{1+i} = \sqrt[2015]{\sqrt{2}^{2015}\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin(\frac{\pi}{4})}}$$

$$= \sqrt[2015]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{2015} + isin\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{2015}\right) \qquad (\text{Với } k = \overline{0,2014}\ )$$

$k = 0 \qquad z_1 = \sqrt[2015]{2}(cos\frac{\pi}{8060} + isin\frac{\pi}{8060})$

$k = 1 \qquad z_2 = z_1\left(cos\frac{2\pi}{2015} + isin\frac{2\pi}{2015}\right) = z_1 a \qquad (\text{Với } a = cos\frac{2\pi}{2015} + isin\frac{2\pi}{2015}\ )$

$k = 2 \qquad z_3 = z_1\left(cos\frac{4\pi}{2015} + isin\frac{4\pi}{2015}\right) = z_1 a^2$

… … … … … ..

$z_{k+1} = z_1 a^k$

Ta có:

$S = \sum_{i=1}^{2015} a_i^2 = \sum_{k=0}^{2014} z_{k+1}^2 = z_1^2(1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{4028}) = z_1^2\frac{a^{4028}-1}{a^2-1}$

Mà $a^{4028} = \left(cos\frac{2\pi}{2015} + isin\frac{2\pi}{2015}\right)^{4028} = cos4\pi + isin4\pi = 1$

$\to S = z_1^2\frac{1-1}{a^2-1} = 0$ (dpcm)

Vậy S = 0

Câu 3:

$XA + 3B = C^t$

$\leftrightarrow X\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\leftrightarrow X\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -4\\-5 & 2\\-2 & -8\end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow X=\begin{bmatrix}6 & -4\\-5 & 2\\-2 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\leftrightarrow X=\begin{bmatrix}6 & -4\\-5 & 2\\-2 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow X=\begin{bmatrix}-62 & 26\\45 & -19\\-20 & 10\end{bmatrix}$$

Vậy $X=\begin{bmatrix}-62 & 26\\45 & -19\\-20 & 10\end{bmatrix}$

Câu 4:

a) Số ẩn là 4 mà chỉ có 3 phương trình. Do đó, không tồn tại m,n để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Khi $m=2$, ta có:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & 2\\1 & -2 & 4 & -1 & -1\\2 & -1 & 2 & 1 & n\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & 2\\0 & -3 & 6 & -3 & -3\\0 & -3 & 6 & -3 & n-4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & 2\\0 & -3 & 6 & -3 & -3\\0 & 0 & 0 & 0 & n-1\end{bmatrix}$$

+ Với $n\neq 1\rightarrow Hệ\ vô\ nghiệm$

+ Với $n=1$, hệ có nghiệm:

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+2x_4=0\\ \quad x_2-2x_3+x_4=1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x_1=-b+1\\x_2=2a-b+1\\x_3=a\\x_4=b\end{cases}$$

Câu 5:

Xét $c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+c_4u_4=\theta$

$\leftrightarrow c_1(1;0;1;1)+c_2(-3;2;1;-1)+c_3(2;1;0;2)+c_4(1;2;1;m)=0$

$$\leftrightarrow\begin{cases}c_1-3c_2+2c_3+c_4=0\\ 2c_2+c_3+2c_4=0\\ c_1+c_2+c_4=0\\ c_1-c_2+2c_3+mc_4=0\end{cases}\overset{c_1=-c_2-c_4}{\Longrightarrow}\begin{cases}2c_2+c_3+2c_4=0\\-4c_2+2c_3=0\\-2c_2+2c_3+(m-1)c_4=0\end{cases}$$

$$\overset{c_3=2c_2}{\Longrightarrow}\begin{cases}4c_2+2c_4=0\\2c_2+(m-1)c_4=0\end{cases}\qquad\overset{2c_2=-c_4}{\Longrightarrow}(m-2)c_4=0$$

$S=\{u_1;u_2;u_3;u_4\}$ pttt khi c_1,c_2,c_3,c_4 không đồng thời bằng $0\leftrightarrow(m-2)=0\leftrightarrow m=2$

Vậy $m=2$ thì S pttt.

Câu 6:

a) Chọn $B = \{1, x, x^2\}$ là cs của $P_2[x]$. Ta có:

$f(1) = 1 + 2x$

$f(x) = 1 - x + 3x^2$

$f(x^2) = 2x - 2x^2$

Ma trận A của f đối với csct B là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $r(f) = r(A) = 2$

b) Xét $|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{10} \\ \lambda_3 = -1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

+)TH1: $\lambda = 0, ta\ có: (A - 0E)X = \theta$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \end{cases}$$

Suy ra $X_1 = t(-2; 2; 3)$ là các vtr ứng với trị riêng $\lambda_1 = 0$ $(t \in R, t \neq 0)$

Tương tự với các trị riêng $\lambda_2 = -1 - \sqrt{10}$ và $\lambda_3 = -1 + \sqrt{10}$ ta có:

$X_2 = t\left(1; \sqrt{10} - 2; 4 - \sqrt{10}\right)$ là các vtr ứng với trị riêng $\lambda_2 = -1 - \sqrt{10}$ $\quad (t \in R, t \neq 0)$

$X_2 = t\left(1; -\sqrt{10} - 2; 4 + \sqrt{10}\right)$ là các vtr ứng với trị riêng $\lambda_3 = -1 + \sqrt{10}$ $\quad (t \in R, t \neq 0)$

Câu 7:

Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra cơ sở của W là $B = \{u_1, u_2\}$ mà $u_1 = (1; 2; -1; 1), u_2 = (0; -1; 1; 0)$

Áp dụng tiêu chuẩn Gram Smidth, ta có:

$v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1; 2; -1; 1)$

$\overline{v_2} = u_2 - \langle u_2; v_1 \rangle v_1 = (0; -1; 1; 0) + \frac{3}{7}(1; 2; -1; 1) = \frac{1}{7}(3; -1; 4; 3)$

Nên $v_2 = \frac{\overline{v_2}}{|\overline{v_2}|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(3; -1; 4; 3)$

Suy ra cơ sở trực chuẩn của W là $B' = \{v_1, v_2\}$ với $v_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1; 2; -1; 1)$ và $v_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}(3; -1; 4; 3)$

Hình chiếu trực giao của véc-tơ u(2;3;1;5) lên kgian W là:

$u' = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 = \frac{12}{7}(1; 2; -1; 1) + \frac{22}{35}(3; -1; 4; 3) = \frac{2}{5}(9; 7; 2; 9)$

Vậy hình chiếu của vct u lên kgian W là $u' = \frac{2}{5}(9; 7; 2; 9)$