

Đáp án Đề 7 – Thi cuối kỳ I Đại Số K60

Câu 1:

$$\begin{aligned} A \rightarrow (B \rightarrow C) &\leftrightarrow \bar{A} \vee (B \rightarrow C) \\ &\leftrightarrow \bar{A} \vee (\bar{B} \vee C) \\ &\leftrightarrow (\bar{A} \vee \bar{B}) \cup C \\ &\leftrightarrow \overline{A \wedge B} \vee C \\ &\leftrightarrow (A \wedge B) \rightarrow C \text{ (dpcm)} \end{aligned}$$

Câu 2:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \sqrt[2015]{1+i} = \sqrt[2015]{2} \sqrt[2015]{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt[2015]{2} \left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{2015} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{2015} \right) \quad (\text{Vói } k = \overline{0,2014}) \end{aligned}$$

$$k = 0 \quad z_1 = \sqrt[2015]{2} \left(\cos\frac{\pi}{8060} + i\sin\frac{\pi}{8060} \right)$$

$$k = 1 \quad z_2 = z_1 \left(\cos\frac{2\pi}{2015} + i\sin\frac{2\pi}{2015} \right) = z_1 a \quad (\text{Vói } a = \cos\frac{2\pi}{2015} + i\sin\frac{2\pi}{2015})$$

$$k = 2 \quad z_3 = z_1 \left(\cos\frac{4\pi}{2015} + i\sin\frac{4\pi}{2015} \right) = z_1 a^2$$

.....

$$z_{k+1} = z_1 a^k$$

Ta có:

$$S = \sum_{i=1}^{2015} a_i^2 = \sum_{k=0}^{2014} z_{k+1}^2 = z_1^2 (1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{4028}) = z_1^2 \frac{a^{4028} - 1}{a^2 - 1}$$

$$\text{Mà } a^{4028} = \left(\cos\frac{2\pi}{2015} + i\sin\frac{2\pi}{2015} \right)^{4028} = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1$$

$$\rightarrow S = z_1^2 \frac{1-1}{a^2-1} = 0 \quad (\text{dpcm})$$

Vậy S = 0

Câu 3:

$$XA + 3B = C^t$$

$$\leftrightarrow X \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



GÓC HỌC TẬP SV BÁCH KHOA - Tri Tri Le

$$\Leftrightarrow X \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -62 & 26 \\ 45 & -19 \\ -20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy } X = \begin{bmatrix} -62 & 26 \\ 45 & -19 \\ -20 & 10 \end{bmatrix}$$

Câu 4:

a) Số ẩn là 4 mà chỉ có 3 phương trình. Do đó, không tồn tại m, n để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Khi $m = 2$, ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & n-4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \end{bmatrix}$$

+ Với $n \neq 1 \rightarrow$ Hệ vô nghiệm

+ Với $n = 1$, hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -b + 1 \\ x_2 = 2a - b + 1 \\ x_3 = a \\ x_4 = b \end{cases}$$

Câu 5:

Xét $c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 = \theta$

$$\Leftrightarrow c_1(1; 0; 1; 1) + c_2(-3; 2; 1; -1) + c_3(2; 1; 0; 2) + c_4(1; 2; 1; m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - 3c_2 + 2c_3 + c_4 = 0 \\ 2c_2 + c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 + mc_4 = 0 \end{cases} \quad c_1 = -c_2 - c_4 \Rightarrow \begin{cases} 2c_2 + c_3 + 2c_4 = 0 \\ -4c_2 + 2c_3 = 0 \\ -2c_2 + 2c_3 + (m-1)c_4 = 0 \end{cases}$$

$$c_3 = 2c_2 \Rightarrow \begin{cases} 4c_2 + 2c_4 = 0 \\ 2c_2 + (m-1)c_4 = 0 \end{cases} \quad 2c_2 = -c_4 \Rightarrow (m-2)c_4 = 0$$

$S = \{u_1; u_2; u_3; u_4\}$ pttt khi c_1, c_2, c_3, c_4 không đồng thời bằng 0 $\Leftrightarrow (m-2) = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Vậy $m = 2$ thì S pttt.

Câu 6:

a) Chọn $B = \{1, x, x^2\}$ là cs của $P_2[x]$. Ta có:

$$f(1) = 1 + 2x$$

$$f(x) = 1 - x + 3x^2$$

$$f(x^2) = 2x - 2x^2$$

Ma trận A của f đối với csct B là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra $r(f) = r(A) = 2$

$$b) \text{ Xét } |A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & -1 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{10} \\ \lambda_3 = -1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

+) TH1: $\lambda = 0$, ta có: $(A - 0E)X = \theta$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \end{cases}$$

Suy ra $X_1 = t(-2; 2; 3)$ là các vtr ứng với trị riêng $\lambda_1 = 0$ ($t \in R, t \neq 0$)

Tương tự với các trị riêng $\lambda_2 = -1 - \sqrt{10}$ và $\lambda_3 = -1 + \sqrt{10}$ ta có:

$X_2 = t(1; \sqrt{10} - 2; 4 - \sqrt{10})$ là các vtr ứng với trị riêng $\lambda_2 = -1 - \sqrt{10}$ ($t \in R, t \neq 0$)

$X_3 = t(1; -\sqrt{10} - 2; 4 + \sqrt{10})$ là các vtr ứng với trị riêng $\lambda_3 = -1 + \sqrt{10}$ ($t \in R, t \neq 0$)

Câu 7:

Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra cơ sở của W là $B = \{u_1, u_2\}$ mà $u_1 = (1; 2; -1; 1), u_2 = (0; -1; 1; 0)$

Áp dụng tiêu chuẩn Gram Smidth, ta có:

$$v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1; 2; -1; 1)$$

$$\bar{v}_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = (0; -1; 1; 0) + \frac{3}{7}(1; 2; -1; 1) = \frac{1}{7}(3; -1; 4; 3)$$

Nên $v_2 = \frac{\overline{v_2}}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{35}}(3; -1; 4; 3)$

Suy ra cơ sở trực chuẩn của W là $B' = \{v_1, v_2\}$ với $v_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1; 2; -1; 1)$ và $v_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}(3; -1; 4; 3)$

Hình chiếu trực giao của véc-tơ $u(2;3;1;5)$ lên kgian W là:

$$u' = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 = \frac{12}{7}(1; 2; -1; 1) + \frac{22}{35}(3; -1; 4; 3) = \frac{2}{5}(9; 7; 2; 9)$$

Vậy hình chiếu của vct u lên kgian W là $u' = \frac{2}{5}(9; 7; 2; 9)$