CHƯƠNG 2: ĐỊNH THỨC

Thời lượng: 6 tiết

NỘI DUNG

1. Khái niệm
2. Các tính chất của định thức
3. Ứng dụng

1. Định nghĩa

Định thức – hàm liên quan đến ma trận vuông A. Một số là định thức (*determinant*) của A, được ký hiệu là **detA**. Định thức có một tính chất rất quan trọng:

detA ≠ 0 khi và chỉ khi A không suy biến (*nonsingular*)

Lưu ý

DetA còn được viết là |A|

Định thức của ma trận vuông luôn tồn tại và có tính duy nhất.

1. Định nghĩa (tt)

Định nghĩa

A là ma trận vuông cấp 2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Khi đó:

$$\det A = ad - bc$$

→ "Định thức" cấp 2

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = ?$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det B = ?$$

1. Định nghĩa (tt)

Định thức cấp 3:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{33}a_{21}a_{12} + a_{11}a_{32}a_{23})$$

1. Định nghĩa (tt)

Ví dụ: Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1.4.6+3.2.1+3.2.5) - (3.4.3+6.2.2+1.1.5)$$

$$=(24+6+30)-(36+24+5)=60-65=-5$$

1. Định nghĩa (tt)

Bài tập: Tính

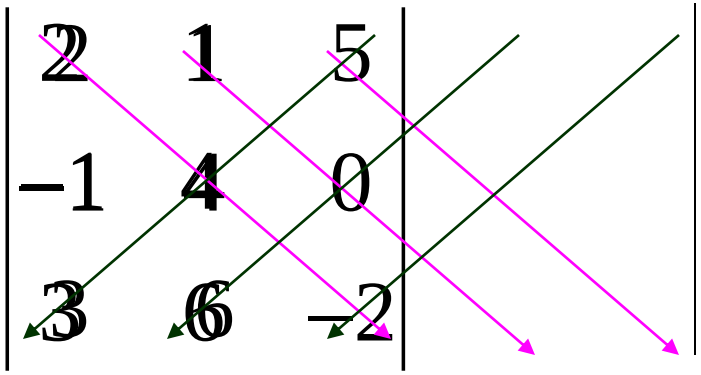
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} = [\,3.(-2).7+6.1.0+4.5.(-1)\,] - [\,4.(-2).6+7.1.5+3.0.(-1)\,]$$

$$= -62+13 = -49$$

1. Định nghĩa (tt)

Ví dụ: Tính

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -108$$



$$=[2.4.(-2)+1.0.3+5.(-1).6]$$
$$-[5.4.3+2.0.6+1.(-1).(-2)]$$

$$=[-16+0-30]-[60+0+2]=-108$$

1. Định nghĩa (tt)

Bài tập: Tính

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 12 = -24$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -55$$

1. Định nghĩa (tt)

Phần bù đại số thứ (i,j) của ma trận A (*cofactor*), kí hiệu là C_{ij} và được xác định như sau:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

trong đó M_{ij} là **định thức** (*minor*) của ma trận có được từ A bằng cách bỏ đi dòng i, cột j.

1. Định nghĩa (tt)

Ví dụ: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

1. Định nghĩa (tt)

Bài tập: Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính:

$C_{21} =$

$C_{23} =$

$C_{33} =$

1. Định nghĩa (tt)

Định lý

Cho A là ma trận vuông cấp n. Định thức của A có thể được xác định như sau:

$$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$$

Hay

$$\det A = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj}$$

$(1 \le i,j \le n)$

1. Định nghĩa (tt)

Ví dụ: Tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \overset{i=1}{=} a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= 1.(-6) + 4.(-3) + (-3).36$$

$$= -126$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \overset{j=3}{=} a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$$

1. Định nghĩa (tt)

Ví dụ: Tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{j=4}{=} a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}$$

$$= 0.C_{14} + 1(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0.C_{34} + (-2)(-1)^8 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$= \ldots$

1. Định nghĩa (tt)

Ví dụ: Tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \overset{i=4}{=} (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 6(-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (24-5)-6(-3-26)$$

$$= 19+174 = 193$$

1. Định nghĩa (tt)

Bài Tập: Tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 102$$

Làm các bài tập 1 – 25 trang 95 – 97

2. Tính chất

a) Nếu 2 hàng của ma trận A như nhau hoặc tỉ lệ với nhau thì detA = 0

b) Nếu A có một hàng toàn số 0 thì detA = 0

c) Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi **detA ≠ 0**

d) Nếu A, B là ma trận vuông cấp n thì **detAB = detA.detB**

Lưu ý: một cách tổng quát, **det(A+B) ≠ detA + detB**

Chứng minh:…

2. Tính chất (tt)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Hai hàng như nhau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Một hàng toàn số 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Hàng 1 và 2 tỉ lệ

1. Định nghĩa (tt)

Định lý

a) Nếu A là ma trận chéo cấp nxn thì:

$$\mathbf{detA} = \mathbf{a_{11}.\, a_{22} \dots a_{nn}}$$

b) Nếu A là ma trận tam giác cấp n (trên hoặc dưới) thì:

$$\mathbf{detA} = = \mathbf{a_{11}.\, a_{22} \dots a_{nn}}$$

Chứng minh: …

2. Tính chất (tt)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Ma trận tam giác

2. Tính chất (tt)

A là ma trận vuông và A^T là chuyển vị của A thì

$$\mathbf{detA = detA^T}$$

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Dựa vào tính chất này, hãy cho biết các tính chất trên có đúng cho cột?

2. Tính chất (tt)

Định nghĩa

Hàm detA , với A là ma trận vuông bất kỳ, được gọi là hàm định thức (*determinant function*) nếu thỏa các tính chất sau:

a) Nếu I là ma trận đơn vị thì det I = 1

b) Nếu B là ma trận có được bằng cách **đổi 2 dòng** của A thì **detB = - detA**

c) Nếu B là ma trận có được bằng cách **cộng tích một số với một dòng vào một dòng khác** của A thì **detB = detA**

d) Nếu B có được từ A bằng cách **nhân một dòng của A với số m** thì **detB = m.detA**.

Chứng minh: …

2. Tính chất (tt)

Định lý

A là ma trận vuông:

$$A \xrightarrow{\lambda h_i} B \Rightarrow \det(B) = \lambda \det(A).$$

$$A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A).$$

$$A \xrightarrow{h_i + \lambda h_j} B \Rightarrow \det(B) = \det(A).$$

2. Tính chất (tt)

Ví dụ

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 9\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{h1\leftrightarrow h3}B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 7 & 9\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

1. Định nghĩa (tt)

Ví dụ

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

2. Tính chất (tt)

Ví dụ

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}3.2 & 3.5\\ 3 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ? \det B$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}; \; 2A=\begin{bmatrix}4 & 10\\ 6 & 8\end{bmatrix}$$

$$\det(2A) = ? \det(A).$$

2. Tính chất (tt)

Ví dụ: Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

2. Tính chất (tt)

Bài tập: Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Tính chất (tt)

Bài tập: Tính định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 58$$

2. Tính chất (tt)

Ví dụ: Tính định thức cấp n sau

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \overset{h_2 - h_1}{=}$$

2. Tính chất (tt)

Làm các bài tập