PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 11

§3. Phương trình vi phân cấp hai (TT)

4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi

c) Phương trình Euler $x^2y'' + axy' + by = 0,\quad a, b \in \mathbb{R}$

Cách giải.

- Đặt $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$
- $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}.\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \dfrac{dy}{dt}$
- $y'' = \dfrac{d}{dx}y' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}.\dfrac{dy}{dt}\right) = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{x}.\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right).\dfrac{dt}{dx}$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

- Thay vào có $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + a\dfrac{dy}{dt} + by = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\dfrac{dy}{dt} + by = 0$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

a) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ (1)

b) $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$

c) $x^2y'' + xy' + y = x$

d) $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$

e) $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

Giải a)

- $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$
- $y' = \dfrac{1}{x}.\dfrac{dy}{dt},\ y'' = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right) \Rightarrow xy' = \dfrac{dy}{dt},\ x^2y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$
- Thay vào ta có $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} - 6y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 6y = 0$ (2)
- Phương trình đặc trưng $r^2 + r - 6 = 0 \Leftrightarrow r = 2,\ r = -3$
- (2) có nghiệm tổng quát $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$
- (1) có nghiệm tổng quát $y = c_1e^{2\ln x} + c_2e^{-3\ln x} = c_1x^2 + \dfrac{c_2}{x^3}$

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2,\ x > 0$ bằng cách đặt $x = e^t$

$$\left(y = (C_1 + C_2\ln x)x^2 + \frac{3}{2}x^2\ln^2 x\right)$$

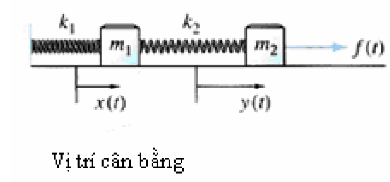
§4. Hệ phương trình vi phân

• Đặt vấn đề

– Các quy luật của tự nhiên không diễn ra đơn lẻ mà gồm nhiều quá trình đan xen nhau

– Hệ phương trình vi phân tuyến tính giải quyết nhiều bài toán nêu trên, chẳng hạn như :

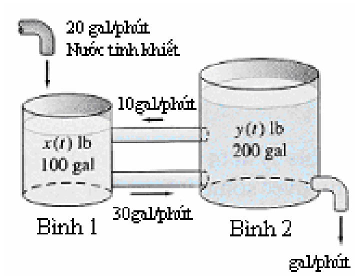
1°/ Ví dụ 1. Xét hệ hai khối lượng và hai lò xo như trong Hình 1, với một lực tác động từ bên ngoài $f(t)$ bên phải khối lượng m_2. Ta kí hiệu $x(t)$ là hàm vị trí (sang phải) của khối lượng m_1 từ trạng thái cân bằng (khi hệ bất động và cân bằng với $f(t) = 0$) và $y(t)$ là vị trí của khối lượng m_2 từ trạng thái tĩnh của nó.



Hình 1. Hệ khối lượng và lò xo trong Ví dụ 1

– Có mô hình toán là $\begin{cases} m_1 x'' = -k_1 x + k_2(y - x) \\ m_2 y'' = -k_2(y - x) + f(t) \end{cases}$

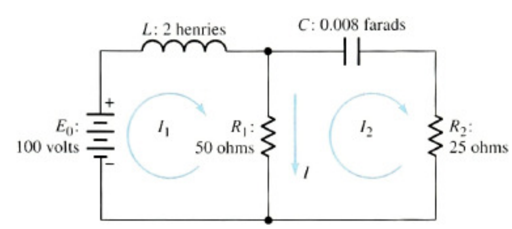
2°/ Ví dụ 2. Xét hai thùng nước muối được nối với nhau như trong Hình 2. Thùng 1 chứa $x(t)$ pounds muối trong 100 gallon của nước biển và thùng 2 chứa $y(t)$ pounds muối trong 200 gallon nước biển. Nước biển trong mỗi thùng được giữ nguyên bởi các vòi bơm và nước biển thùng này sang thùng khác với tốc độ chỉ ra trên Hình 2. Thêm nữa nước nguyên chất chảy vào thùng 1 với tốc độ 20gal/phút và nước muối trong thùng 2 chảy ra với tốc độ 20gal/phút



Hình 2. Hai thùng nước biển trong Ví dụ 2

– Có mô hình toán là $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{10}x + \dfrac{1}{20}y \\ y' = \dfrac{3}{10}x - \dfrac{3}{20}y \end{cases}$

3°/ Ví dụ 3. Xét mạch điện như trong Hình 3, ở đó $I_1(t)$ kí hiệu của dòng điện chạy qua cảm biến L và $I_2(t)$ kí hiệu của dòng điện chạy qua điện trở R_2. Dòng điện chạy qua điện trở R_1 là $I = I_1 - I_2$ theo hướng đã chỉ.



Hình 3. Mạng điện trong Ví dụ 3

– Có mô hình toán là $\begin{cases} \dfrac{dI_1}{dt} + 25I_1 - 25I_2 = 50 \\ 2\dfrac{dI_1}{dt} - 3\dfrac{dI_2}{dt} - 5I_2 = 0 \end{cases}$

1. Đại cương

– Định nghĩa. Hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp một có dạng

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

– Định lí 1. Giả sử các hàm $f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n)$ và các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n)$ liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Cho $(x_0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \dots,\ y_n^0) \in D$, khi đó $\exists U_\varepsilon(x_0)$ để (1) có nghiệm duy nhất thoả mãn các điều kiện $y_i(x_0) = y_i^0,\ i = \overline{1,\ n}$

Định nghĩa. Ta bảo $(y_1,\ \dots,\ y_n)$, ở đó $y_i = \varphi_i(x,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n)$ là nghiệm tổng quát của hệ (1) $\Leftrightarrow$

- thoả mãn hệ (1) $\forall\, c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$
- $\forall\,(x_0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \dots,\ y_n^0)$ thoả mãn định lí 1 $\Rightarrow$ $\exists\, c_i = c_i^0$ sao cho các hàm số $y_i = \varphi_i(x,\ c_1^0,\ c_2^0,\ \dots,\ c_n^0)$ thoả mãn điều kiện $y_i\big|_{x=x_0} = y_i^0,\ i = \overline{1,\ n}$

Nghiệm riêng của (1) nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho $c_i,\ i = \overline{1,\ n}$ các giá trị xác định

2. Cách giải

- Phương trình vi phân cấp n: $y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \dots,\ y^{(n-1)})$ luôn đưa về hệ phương trình vi phân chuẩn tắc cấp 1: Đặt $y = y_1$, có

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n) \end{cases}$$

Ngược lại, hệ PTVP chuẩn tắc luôn đưa về phương trình cấp cao bằng cách khử những hàm số chưa biết từ các phương trình của hệ, được gọi là phương pháp khử

Ví dụ 1. a) $\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 4y + 5z \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{y}{2} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$

e) $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}$ $\left(\begin{cases} y = C_1\cos x + C_2\sin x \\ z = C_2\cos x - C_1\sin x \end{cases}\right)$

f) $\begin{cases} y' = y + 5z \\ z' = -(y + 3z) \end{cases}$ $\left(\begin{cases} y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) \\ z = \dfrac{1}{5}e^{-x}\left[(C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x\right] \end{cases}\right)$

g) $\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$ $\left(\begin{cases} y = (C_1 - C_2 - C_1x)e^{-2x} \\ z = (C_1x + C_2)e^{-2x} \end{cases}\right)$

Giải a)

- Từ phương trình thứ nhất $\Rightarrow$ $y'' = 5y' + 4z'$
- Thay $z' = 4y + 5z$ vào phương trình 1 có $y'' = 5y' + 16y + 20z$

• Từ phương trình 1 $\Rightarrow z = \frac{1}{4}(y' - 5y)$, thay vào ta có $y'' - 10y' + 9 = 0$

• Nghiệm tổng quát $y = c_1e^x + c_2e^{9x}$

• $y' = c_1e^x + 9c_2e^{9x}$, thay vào phương trình đầu có $z = -c_1e^x + c_2e^{9x}$

c) +) $zz'' = 2z'^2$ +) $z = -\dfrac{1}{C_1x + C_2}$ +) $y = \dfrac{2C_1}{(C_1x + C_2)^2}$

3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số

a) Định nghĩa

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (1)$$

ở đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$

b) Cách giải. Để đơn giản ta xét hệ $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$ (2)

• Giải phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ (3)

• Nếu (3) có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow$ (2) có nghiệm tổng quát là (y_1, y_2) ở đó

$$y_1 = c_1y_{11} + c_2y_{12}; \qquad y_2 = c_1y_{21} + c_2y_{22}$$

ở đó $y_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 x}$, $y_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 x}$, $y_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 x}$, $y_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 x}$, (p_{1k}, p_{2k}) là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_k, $k = 1, 2$

Ví dụ 1. Giải các hệ sau **a)** $\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 4y + 3z \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y' = y - 5z \\ z' = 2y - z \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + 3z \end{cases}$

Giải a) Cách 1. Phương pháp khử:

• $y'' = y' + 2z'$ với $z' = 4y + 3z$ và $z = \frac{1}{2}(y' - y) \Leftrightarrow \begin{cases} y'' - 4y' - 5y = 0 \\ z = \frac{1}{2}(y' - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = C_1e^{-x} + C_2e^{5x} \\ z = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{5x} \end{cases}$

Cách 2. *Phương pháp toán tử*

Hệ $\begin{cases} L_1x + L_2y = f_1(t) \\ L_3x + L_4y = f_2(t) \end{cases}$, *ở đó L_i là các toán tử tuyến tính*

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & L_2 \\ f_2(t) & L_4 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} L_1 & f_1(t) \\ L_3 & f_2(t) \end{vmatrix}$$

- $\begin{cases}(D-1)y-2z=0\\4y+(3-D)z=0\end{cases}$, $D\equiv\dfrac{d}{dx}$
- Ta có $\begin{vmatrix}D-1 & -2\\4 & 3-D\end{vmatrix}=(D-1)(3-D)+8=-D^2+4D+5$
- Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}-y''+4y'+5y=0\\-z''+4z'+5z=0\end{cases}$
- Phương trình đặc trưng $-k^2+4k+5=0\Leftrightarrow k_1=-1,\ k_2=5$
- Ta có $y=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}$; $z=c_3e^{-x}+c_4e^{5x}$
- Thay $y,\ z$ vào phương trình 1 ta có

$$0=-y'+y+2z=c_1e^{-x}-c_2.5e^{5x}+c_1e^{-x}+c_2e^{5x}+2(c_3e^{-x}+c_4e^{5x})$$
$$=(2c_1+2c_3)e^{-x}+(-4c_2+2c_4)e^{-5x},\ \forall x$$

$\Rightarrow\begin{cases}2c_1+2c_3=0\\-4c_2+2c_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_3=-c_1\\c_4=2c_2\end{cases}$

- Nghiệm tổng quát $(y,\ z)$, ở đó $y=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}$; $z=-c_1e^{-x}+2c_2e^{5x}$

Cách 3. • $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda-5=0\Leftrightarrow\lambda_1=5,\ \lambda_2=-1$

- $\lambda_1=5$: $\begin{cases}(1-5)p_{11}+2p_{21}=0\\4p_{11}+(3-5)p_{21}=0\end{cases}\Leftrightarrow 4p_{11}-2p_{21}=0$

Chọn $p_{11}=1,\ p_{21}=2$

- $\lambda_2=-1$: $\begin{cases}\left(1-(-1)\right)p_{12}+2p_{22}=0\\4p_{12}-\left(3-(-1)\right)p_{22}=0\end{cases}\Leftrightarrow 2p_{12}+2p_{22}=0$

Chọn $p_{12}=1,\ p_{22}=-1$

- Hệ nghiệm cơ bản là $y_1=e^{5x}$; $z_1=2e^{5x}$; $y_2=e^{-x}$; $z_2=-e^{-x}$
- Nghiệm tổng quát: $(y\ ;\ z)$, ở đó $y=c_1e^{5x}+c_2e^{-x}$; $z=2c_1e^{5x}-c_2e^{-x}$

Ví dụ 2

a) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y\\\dfrac{dy}{dt}=3x+4y\end{cases}$ $\left(\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{5t}\\y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}\end{cases}\right.$ hoặc $\left.\begin{cases}x=-C_1e^t+\dfrac{1}{3}C_2e^{5t}\\y=C_1e^t+C_2e^{5t}\end{cases}\right)$

b) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-3y\\\dfrac{dy}{dt}=3x+y\end{cases}$ $\left(\begin{cases}x=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)\\y=e^t(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t)\end{cases}\right.$ hoặc $\left.\begin{cases}y=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)\\x=e^t(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t)\end{cases}\right)$

Chú ý. Phương pháp toán tử giải được hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng số

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!