

HAPPY NEW YEAR 2011

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÝ THUYẾT CHUỖI

BÀI 2

§ 3. Chuỗi số với số hạng có dấu bất kì

- Chuỗi với số hạng có dấu bất kì
- Tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối
- Chuỗi đan dấu

1. Đặt vấn đề.

2. Chuỗi với số hạng có dấu bất kì

Định nghĩa: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi

là bán hội tụ $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kì và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Định lý. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ (HTTĐ)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$ (HTTĐ)

Hướng dẫn.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$

+) Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

+) $\sin n^2 \in \mathbb{R}$

+) Không có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0$

+) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$

Thật vậy, phản chứng có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n+1) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n+3) = 0$

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ hội tụ

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n+1) = 0$

+) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$ hội tụ

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^2(2n+1) + \cos^2(2n+1)) = 0$ (vô lí)

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ phân kì.

Nhận xét.

1°/ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kì theo tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì

2°/ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kì $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì (đúng hay sai?)

3. Chuỗi đan dấu

Định nghĩa. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$ được gọi là chuỗi đan dấu

Chú ý. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ cũng được gọi là chuỗi đan dấu.

Định lí Leibnitz

Dãy $\{a_n\}$ giảm, $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ hội tụ và có $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \leq a_1$

Chứng minh:

+) $n = 2m$:

- Có $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \Rightarrow \{S_{2m}\}$ tăng
- $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1$
- Từ đó $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ và có $S \leq a_1$

+) $n = 2m + 1$:

- $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$
- Do $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S$.

Định lí được chứng minh.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau

- | | |
|---|--|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (Bán HT) | e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3.5.7 \dots (2n+1)}{2.5.8 \dots (3n-1)}$ (HTTĐ) |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (Bán HT) | f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.4.7 \dots (3n-2)}{7.9.11 \dots (2n+5)}$ (PK) |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ (HTTĐ) | g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan \frac{1}{n\sqrt{n}}$ (HTTĐ) |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}$ (PK) | h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$ (PK) |

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$ (PK)

k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ (PK)

l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln^2 \frac{n+1}{n}$ (HTTĐ)

m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ (Bán HT)

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sin(2n\beta)}{\sqrt[3]{n^7+2n^3+3}}$, $\beta \in \mathbb{R}$ (HTTĐ)

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ (Bán HT)

Hướng dẫn.

b) +) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ là chuỗi đan dấu

+) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ giảm và có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

+) Hội tụ theo Leibnitz

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì \Rightarrow bán hội tụ

d) +) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}$ là chuỗi đan dấu

+) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n-5}$ phân kì

+) $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5}$

+) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{6n-5}$ phân kì.

4. Tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S \Rightarrow$ chuỗi số nhận được từ chuỗi này bằng cách đổi thứ tự các số hạng và nhóm tùy ý các số hạng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S

b) Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kì \Rightarrow có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để chuỗi thu được hội tụ và có tổng là một số bất kì cho trước hoặc trở nên phân kì.

Định nghĩa. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, khi đó ta định nghĩa phép nhân chuỗi:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ ở đó } c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S_1, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = S_2 \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = S_1 S_2$$

Ví dụ 3.a) Xét sự hội tụ của tích các chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \tan \frac{1}{k\sqrt{k}} \cdot \ln^2 \frac{n+2-k}{n+1-k} \right)$

Hướng dẫn.

a) +) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ hội tụ tuyệt đối

+) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \right)$ hội tụ

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com