Đề số 7. K59. Đại số

Câu 1. $z^6 - 4iz^3 + 5 = 0$ Đặt: $z^3 = x$ thì ta có pt: $x^2 - 4ix + 5 = 0$

$\Delta' = -9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 5i \\ x_2 = -i \end{array}\right.$

⊕ $z^3 = 5i \rightarrow z = \ldots$ ⊕ $z^3 = -i \Rightarrow z = \ldots$

Câu 2.

Giả sử $(y_1; y_2) \in \mathbb{R}^2$ với $f(x_1; x_2) = (y_1; y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 = y_1 \\ 3x_2 + 3x_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{y_1} \\ x_2 = \dfrac{y_2 - 3\sqrt[3]{y_1}}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \forall (y_1; y_2)$ thì luôn tồn tại! $(x_1; x_2)$ thỏa mãn $f(x_1, x_2) = (y_1; y_2)$

$\Rightarrow f$ là song ánh.

Câu 3.

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & b \\ 4 & 1 & 4 & a & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & b-3 \\ 0 & 5 & 4 & a-4 & -8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2 & b+7/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & a+1 & \frac{16}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3b+7 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 3-b \end{array}\right]$$

a) với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -8 \\ 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$

b) ⊕ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow$ hệ vô số no ⊕ $\begin{cases} a = 1 \\ b \neq 3 \end{cases} \rightarrow$ hệ vô nghiệm

⊕ $\begin{cases} a \neq 1 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow$ hệ có no!

Câu 4. $V_1 + V_2 = \text{Span}(v_1; v_2; v_3; v_4)$

Xét ma trận hàng (bậc thang) → đó là các véc tơ độc lập tuyến tính

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3 \to \dim(V_1 + V_2) = 3$$

Cơ sở: $u_1 = (1;0;1;1)$; $u_2 = (0;1;-3;-2)$

$u_3 = (0;0;3;2)$

b) gọi $u \in V_1 \cap V_2$

$$\Rightarrow u = t_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = t_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_4\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 2t_2 = t_3 + 2t_4 \\ t_2 = 2t_3 + 3t_4 \\ t_1 - t_2 = t_3 - t_4 \\ t_1 = t_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = a \\ t_2 = -a \\ t_3 = a \\ t_4 = -a \end{cases} \Rightarrow u = a\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 1$$

Cơ sở $u_4 = (-1;-1;2;1)$

Câu 5.

Ta có $\begin{cases} f(1) + 2f(x^2) = -1 + 5x + 4x^2 \\ f(1) + f(x) = 3 + x + 5x^2 \\ 2f(x) + f(x^2) = 3 + 2x + 7x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 + x + 2x^2 \\ f(x) = 2 + 3x^2 \\ f(x^2) = 2x + x^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Ma trận của f trong CS B là $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$[f(u)]_B = A.[u]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow f(u) = 6 + 4x + 9x^2$ sai

Câu 6.

$$w(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2$$

Ma trận của $w(x)$ là: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 16\lambda - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -4 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 4 \end{array}\right.$$

- $\lambda = -4$.

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = -2a \end{cases} \Rightarrow u_1 = (1; 1; -2) \Rightarrow u_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

- $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{cases} \Rightarrow u_2 = (1; 1; 1) \rightarrow u_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- $\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -a \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_3 = (1; -1; 0) \Rightarrow u_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}; 0\right)$$

Ma trận đổi: $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = T$ đổi từ chính tắc sang B

$\Rightarrow$ Cơ sở trực chuẩn $B = \{u_1', u_2', u_3'\}$ thì w có dạng chính tắc

$w = -4y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$

b) $x = (x_1; x_2; x_3)$ với $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

Theo ma trận đổi T thì $x \to y = (y_1; y_2; y_3)$ và $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$

$\Rightarrow y_3^2 = 1 - (y_1^2 + y_2^2)$

$w = -4y_1^2 - y_2^2 + 4(1 - (y_1^2 + y_2^2))$

$\Rightarrow w = 4 - (8y_1^2 + 5y_2^2)$

$\Rightarrow$ w ~~đạt~~ max $\Leftrightarrow 8y_1^2 + 5y_2^2$ ~~đạt~~ min $\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_3 = 1$

$\Rightarrow y = (0; 0; 1) \Rightarrow x = y.T^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}; 0\right)$

Vậy $x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ thì w ~~đạt~~ max $= 4$